Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Corso di GEOMETRIA I - A.A. 2013/2014 (Argomenti I semestre)
Prova scritta 16. 7. 2014

1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori

$$w_1 = {}^t(0,1,1,-3),\ w_2 = {}^t(0,-2,1,0),\ w_3 = {}^t(0,-5,-1,h), w_4 = (1,h,2+h,0)$$

con h parametro reale e siano $W_h = Span(w_1, w_2, w_3)$.
Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-2x_1+x_2+2x_3+x_4, 4x_1+2x_2+4x_3+2x_4, 4x_2+8x_3+4x_4, -x_1)$$

a) Si calcolino le dimensioni dei sottospazi vettoriali $Kerf$ e Imf di $\mathbb{R}^4$, individuando una base per ciascuno di essi.

2 b) Si stabilisca se esistono quali valori di h per i quali $W_h = Kerf$.

2 c) Si stabilisca se esistono valori di h per i quali $w_4 \in Imf$.

3 d) Si stabilisca se esiste e se é univocamente determinata un'applicazione lineare non nulla $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g\,o\,f$ é l'applcazione nulla.

2. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

3 a) Se A é la matrice dei coefficienti di un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite x, y, z che ha tra le sue soluzioni i vettori ${}^t(1,2,-1)$ e ${}^t(0,1,1)$, allora il rango di A é uguale a 2.

3 b) Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ una matrice tale che $A^3 = 5I_3$ (con I_3 matrice identitá di ordine 3) e sia $V = Span(A, A^7, A^{-1}) \subset M_3(\mathbb{R})$. Allora $dim_{\mathbb{R}}\, V \leq 2$.

3. Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$, si considerino le rette di r_1, r_2 di equazioni rispettivamente

$$r_1 : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2-t\,, \\ z = t+1 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = z \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

con t parametro reale, il piano $\pi : x + y - z = 1$ e i punti

$$A_1 = (0,2,1), \quad A_2 = (1,-1,1), \quad A_3 = (2,1,-2).$$

6 a) Si verifichi che le due rette r_1 e r_2 sono sghembe, si trovi la retta perpendicolare e incidente entrambe.

2 b) Si stabilisca se esiste e, in caso positivo, si determini una retta per il punto A_3 e perpendicolare a r_1 e r_2.

3 c) Si trovino le equazioni della retta proiezione ortogonale di r_1 sul piano π.

3 d) Si scriva l'equazione del luogo dei punti dello spazio equidistanti dai punti A_1 e A_2.

Geometria I 16.7.2014

Argomenti I semestre

Esercizio 1

(a) $f(x_1, \dots x_4) = (-2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4,\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4,$
$4x_2 + 8x_3 + 4x_4,\ -x_1)$

Ker f
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema è equivalente al sistema
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e' cui spazio delle soluzioni ha dimensione 2 e una base è data da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Im f ha dimensione 2 ~~ed~~ è e una base è data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equazioni
$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 - 8x_4 \\ x_3 = 6x_1 - 12x_4 \end{cases}$$

(b) Si può osservare che $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono due vettori linearmente indipendenti e appartengono a Ker f.

$w_3 \in \text{Ker } f \iff -5 - 2 + h = 0 \iff h = 7$

quindi $\quad W_h = \ker f \iff h = 7$

(c) $\quad w_4 \in \operatorname{Im} f \quad$ se il sistema

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = h \\ 4x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 2+h \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{ha soluzioni}$$

Questo sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = h \\ 4x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 2+h \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzioni $\iff \begin{cases} h = 2 \\ 2+h = 4 \end{cases} \iff h = 2$

quindi $\quad w_4 \in \operatorname{Im} f \iff h = 2$

(d) Considero i vettori base di $\operatorname{Im} f$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e altri due vettori v_3, v_4 t.c.

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$

definisco

$$g(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g(v_3) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad g(v_4) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

con almeno uno dei due vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ diversi dal vettore nullo

$g \circ f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è l'applicazione nulla

Esercizio 2

(a) Se $AX = 0$ è un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite x, y, z che ha tra le sue soluzioni $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, allora lo spazio vettoriale S delle soluzioni del sistema ha dimensione ≥ 2. Ma

$$\dim_{\mathbb{R}} S = 3 - \operatorname{rg} A \quad \text{quindi}$$

$$\operatorname{rg} A = 3 - \dim_{\mathbb{R}} S \leq 1$$

(b) Se $A^3 = 5I_3$ allora

$$A^7 = 25A$$

pertanto

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Span}(A, A^7, A^{-1}) \leq 2$$

Esercizio 3

Le due rette $r_1 \begin{cases} x = 3t \\ y = 2-t \\ z = t+1 \end{cases}$ $r_2 \begin{cases} x = z \\ 2x+y = 1 \end{cases}$

hanno vettori di direzione rispett.

$$u_1 = (3, -1, 1) \qquad u_2 = (1, -2, 1)$$

quindi non sono parallele

~~la retta perpendicolare e incidente entrambe~~

Non sono incidenti perché dovrebbe essere

$$\begin{cases} 3t = t+1 \\ 6t+2-t = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{5} \end{cases} \quad \nexists t$$

La retta perpendicolare e incidente entrambe le rette ha la direzione del vettore

$$u_3 = u_1 \wedge u_2 = (1, -2, -5)$$

La retta perpendicolare e incidente le due rette è data dall'intersezione del piano π_1 ∈ al fascio di sostegno r_1 e // al vettore u_3 con il piano π_2 ∈ al fascio di sostegno r_2 e // al vettore u_3

Fascio di sostegno r_1

$$\lambda(x-3z+3)+\mu(z+y-2-1)=0$$

$$\lambda x+\mu y+(\mu-3\lambda)z+3\lambda-3\mu=0 \qquad (*)$$

$$(\lambda, \mu, \mu-3\lambda)\cdot(1,-2,-5)=0$$

$$\lambda-2\mu-5\mu+15\lambda=0$$

$$16\lambda-7\mu=0 \qquad \mu=\frac{16}{7}\lambda$$

π_1 $\quad 7(x-3z+3)+16(z+y-3)=0$

π_1 $\quad 7x+16y-5z-27=0$

Fascio di sostegno r_2

$$\lambda(x-z)+\mu(2x+y-1)=0$$

$$(\lambda+2\mu, \mu, -\lambda)\cdot(1,-2,-5)=0$$

$$\lambda+\cancel{2\mu}-\cancel{2\mu}+5\lambda=0 \qquad \lambda=0$$

π_2 $\quad 2x+y-1=0$

Retta perpendicolare e incidente

$$\begin{cases} 7x+16y-5z-27=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$$

(b) Retta per A_3 e perpendicolare a r_1, r_2

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=-2-5t \end{cases}$$

(c) La retta proiezione ortogonale di r_1 nel piano $\pi \quad x+y-z=1$ si ottiene intersecando π con il piano α del fascio di sostegno r_1 e ortogonale a π

α è ~~da~~ la equazione (*) con

$$(\lambda, \mu, \mu-3\lambda)\cdot(1,1,-1)=0$$

$$\lambda + \cancel{\mu} - \cancel{\mu} + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Il piano

$$\alpha \quad y+z=3$$

proiezione di r_1 $\quad \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+z=3 \end{cases}$

(d) Il luogo $\mathcal{L}$ dei punti dello spazio equidistanti dai punti A_1, A_2 è il piano per il punto medio M di A_1, A_2 ortogonale ~~Piano~~ al segmento A_1A_2.

Punto medio di A_1, A_2 è $M=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

La retta contenente il segmento A_1A_2 ha vettore di direzione

$$v=(1,-3,0)$$

$$\mathcal{L} \quad x-\frac{1}{2}-3\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\mathcal{L} \quad x-3y+1=0$$

Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Corso di GEOMETRIA I - A.A. 2013/2014
(VECCHIO ORDINAMENTO - Programma prof. Menichetti)
Prova scritta 16. 7. 2014

1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori

$$w_1 = {}^t(0,1,1,-3),\ w_2 = {}^t(0,-2,1,0),\ w_3 = {}^t(0,-5,-1,h),\ w_4 = (1,h,2+h,0)$$

con h parametro reale e siano $W_h = Span(w_1, w_2, w_3)$.
Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-2x_1+x_2+2x_3+x_4, 4x_1+2x_2+4x_3+2x_4, 4x_2+8x_3+4x_4, -x_1)$$

3 a) Si calcolino le dimensioni dei sottospazi vettoriali $Kerf$ e Imf di $\mathbb{R}^4$, individuando una base per ciascuno di essi.

2 b) Si stabilisca se esistono quali valori di h per i quali $W_h = Kerf$.

2 c) Si stabilisca se esistono valori di h per i quali $w_4 \in Imf$.

3 d) Si stabilisca se esiste e se é univocamente determinata un'applicazione lineare non nulla $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g\,o\,f$ é l'applcazione nulla.

2 e) L'applicazione f ammette un autovalore di molteplicitá almeno due?

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Discutere la diagonalizzabilitá di A, e, se la matrice risulta diagonalizzabile, si determini una matrice invertibile $P \in M_n(\mathbb{R})$ tale che PAP^{-1} sia una matrice diagonale e una matrice diagonale B simile ad A.

3. In $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare canonico sia $U :=< (0,2,1) >$.

2 i) Si stabilisca se l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ per cui U e' autospazio rispetto all'autovalore 0 e $U^\perp$ lo é rispetto all'autovalore 3 risulta essere autoaggiunto e/o ortogonale.

3 ii) Indicata con E la base canonica di $\mathbb{R}^3$, si associ canonicamente ad $M_E(f)$ una forma bilineare b. Tale forma e' un prodotto scalare ? Giustificare la risposta.

3 iii) Si stabilisca se i sottoinsiemi definiti da
$V := \{v \in \mathbb{R}^3 \ :\ b(v,u) = 0 \text{ per ogni } u \in \mathbb{R}^3\}$ e
$W := \{v \in \mathbb{R}^3 \ :\ b(v,v) = 0\}$
sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ ed in caso affermativo determinarne una base.

4. Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$, si considerino le rette di r_1, r_2 di equazioni rispettivamente

$$r_1 : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = t + 1 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x = z \\ 2x + y = 1 \end{cases},$$

$$s_1 : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad s_2 : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 4 \end{cases},$$

con t parametro reale, i piani

$$\pi_1 : x + z = 1, \quad \pi_2 : x - y = 2.$$

a) Si stabilisca se esiste un'affinitá ϕ dello spazio tridimensionale tale che $\phi(r_1) = s_1$ e $\phi(r_2) = s_2$.

6 b) Si stabilisca se esiste e, in caso positivo, si determini una affinitá ψ dello spazio tridimensionale tale che $\psi(r_1) = r_1$ e $\psi(\pi_1) = \pi_2$.

Esame di Geometria I 16.7.2014

programma prof. Menichetti

Esercizio 1

Per a) b) c) d) si vede I semestre

e) $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f = 2$ quindi f ha autovalore

$\lambda = 0$ con molteplicità ≥ 2

Esercizio 2

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (-3\lambda + \lambda^2 + 2)(4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2)$$

$$= (\lambda^2 - 3\lambda + 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) =$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) =$$

$$= (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

$\lambda = 2$ con molt 2

$\lambda = 1$ " " 1

$\lambda = 3$ " " 1

Calcolo $\dim_{\mathbb{R}} V_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = -2x_3 \end{cases}$$

$\dim V_2 = 2$ base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

A è diagonalizzabile.

Determiniamo V_1

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases} \qquad \text{base di } V_1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determiniamo V_3

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_4 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{Base} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice P è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{pmatrix} = B$$

Esercizio 5

$U := \langle 0, 2, 1 \rangle \qquad U^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y + z = 0\}$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

① Essendo gli autospazi V_0 e V_3 ortogonali f è autoaggiunto

f non è ortogonale in quanto non è iniettivo.

② $2f(e_2) + f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(e_2) - 2f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$5f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{12}{5} \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La forma bilineare che ha come matrice associata $M_E(f)$ non è un prodotto scalare, in quanto non ha rango massimo

③ $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x = 0 \\ y - 2z = 0 \end{matrix} \right\}$ è un sottospazio vett. di dim 1 e una base è

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x^2 + \frac{3}{5}y^2 + \frac{12}{5}z^2 - \frac{12}{5}yz = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + \frac{1}{5}y^2 + \frac{4}{5}z^2 - \frac{4}{5}yz = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + \frac{1}{5}(y-2z)^2 = 0 \right\} =$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x=0,\; y-2z=0 \right\} = V$$

base $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 4

(a) $\nexists\ \phi$ perché r_1, r_2 sono sghembe e s_1, s_2 sono parallele

(b) Esiste ψ (non è univocamente determinata) perché

$r_1 \cap \pi_1 = \{(0,2,1)\}$

$r_1 \cap \pi_2$ $\qquad 3t - 2 + t = 0$

$\qquad 2t - 2 = 0 \qquad t = 1$

$= \{(3,1,2)\}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f(e_2) = e_3$

$f(e_1) - f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$3f(e_1) - f(e_2) + f(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f(e_1) - f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(e_1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$3 f(e_1) + f(e_3) = f(e_2) + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 = 1 + b_1 \\ 1 = b_2 \\ \cancel{2} = \cancel{2} - \frac{1}{2} + b_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 1 \\ b_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Una affinità ψ tale che $\psi(r_1) = r_1$ e $\psi(\pi_1) = \pi_2$ è

$$\psi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$